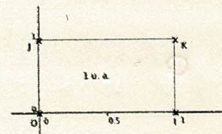


Cours – Séquence n° 16 – CALCUL INTÉGRAL

I- INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE SUR UN INTERVALLE

Définition

Dans un repère orthogonal $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, l'**unité d'aire** (notée u.a.) est l'aire du rectangle OIKJ où K est le point de coordonnées (1 ; 1).

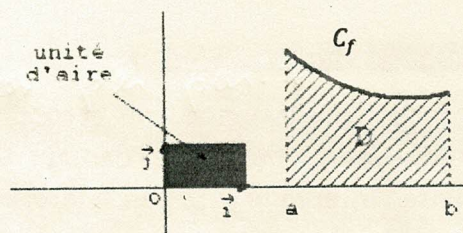


Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

L'**intégrale de a à b de f** est l'aire du domaine limité par :

- C_f ;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Notation

Ce nombre réel est noté : $\int_a^b f(x)dx$ et on lit : « *intégrale de a à b de f* ».



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques

- 1) Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend que de f et de $[a ; b]$. Ce nombre est indépendant du choix des unités sur les axes.
- 2) a et b sont les bornes de l'intégrale.
- 3) On dit que x est une « *variable muette* » car elle n'intervient pas dans le résultat. Elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre à l'exception de a et de b : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \dots$

Exemple

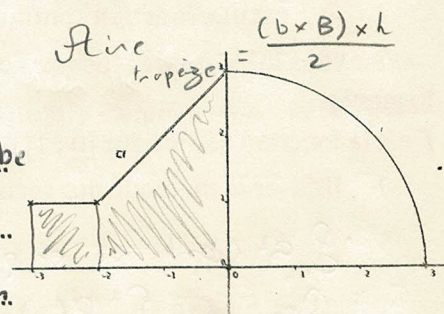
f est la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par sa courbe C_f . Calculer $\int_{-3}^3 f(t) dt$.

f est continue sur $[-3 ; 3]$. (on peut tracer sa courbe sans lever le crayon).

f est positive sur $[-3 ; 3]$. (sa courbe est située au dessus de l'axe des abscisses).

Donc $\int_{-3}^3 f(t) dt$ est l'aire du domaine limité par :

- la courbe de f ;
- l'axe des abscisses
- les droites d'équations $x = -3$ et $x = 3$



$$\text{Donc } \int_{-3}^3 f(t) dt = 1 \times 1 + \frac{(1+3) \times 2}{2} + \frac{\pi \times 3^2}{2} = 5 + \frac{9\pi}{2} \text{ u.a.}$$

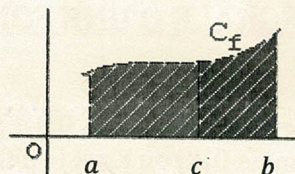
Propriétés : conséquences immédiates

Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, alors :

1) $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2) Pour tout réel c de $[a; b]$,

$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ (relation de Chasles).

**Principe de la méthode des rectangles**

f est une fonction positive, croissante et continue sur un intervalle $[a; b]$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

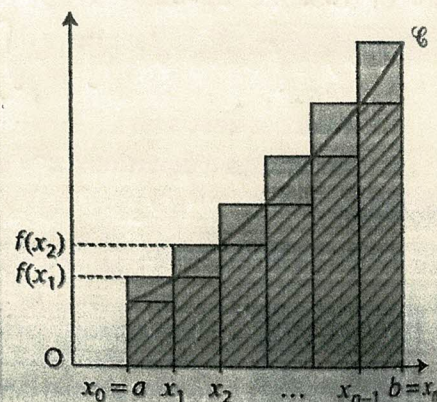
On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même longueur

$h = \frac{b-a}{n}$ et on note $x_k = a + kh$ avec k nombre entier naturel, $0 \leq k \leq n$.

Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq n-1$), on construit les rectangles de hauteur $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$.

s_n est la somme des aires, en u.a., des rectangles hachurés contenus dans le domaine sous la courbe $\mathcal{C}$.

S_n est la somme des aires, en u.a., des rectangles colorés en violet qui contiennent le domaine sous la courbe $\mathcal{C}$.

**Propriété (admise) : méthode des rectangles**

Si f est une fonction continue, croissante et positive sur $[a; b]$, alors pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Remarques

- Si f est une fonction continue, décroissante et positive sur $[a; b]$, il faut changer le sens des inégalités.
- Plus la valeur de n augmente, plus l'encadrement de $\int_a^b f(x) dx$ a une amplitude petite.

Exemple

f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^x$.

- Utiliser la méthode des rectangles pour déterminer un encadrement de $I = \int_0^1 f(x) dx$.

f est continue et positive sur $[0; 1]$.

Pour $I = \int_0^1 f(x) dx$ vérifie :

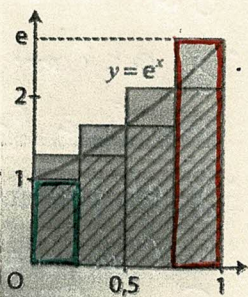
$$0,25 \times f(0) + \dots + 0,25 \times f(0,75) \leq I \leq 0,25 \times f(0,25) + \dots + 0,25 \times f(1)$$

$$0,25(e^0 + e^{0,25} + e^{0,5} + e^{0,75}) \leq I \leq 0,25(e^{0,25} + e^{0,5} + e^{0,75} + e^1)$$

$$1,542 \leq I \leq 1,943$$

valeur approchée au
milieu par défaut

2 valeurs approchées au milieu
par excès



2. Voici une fonction « rectangles » écrite en langage Python qui permet d'obtenir un encadrement de I. Programmer la calculatrice et vérifier l'affichage obtenu lorsque $n = 500$.

```

1 from math import *
2 def f(x):
3     y=exp(x)
4     return y
5
6 def rectangles(n):
7     som=0
8     for k in range(1,n):
9         som=som+f(k/n)
10    som1=1/n*(som+f(0))
11    som2=1/n*(som+f(1))
12    return som1,som2

```

>>> rectangles(500)
(1.716564119391158, 1.72000065)

Propriété : théorème fondamental du calcul intégral

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $[a ; b]$ qui s'annule en a .

(Par conséquent, F est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est f).

Démonstration dans le cas où f est croissante sur $[a ; b]$ *

1^{er} cas : $h > 0$

On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a ; b]$.

On veut démontrer que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Comme f est continue et positive sur $[x ; x+h]$, l'aire sous la courbe de f sur $[x ; x+h]$ est comprise entre les aires des rectangles $ABFE$ et $ABHG$. Or, $\text{Aire}(ABFE) = h \times f(x)$ et $\text{Aire}(ABHG) = h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a ; b]$, on a : $h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$

Puisque $h > 0$, on a : $f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$

2^e cas : $h < 0$ La démonstration est analogue (encadrements inversés) : $f(x+h) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x)$.

Conclusion

Comme f est continue sur $[a ; b]$, en particulier, f est continue en x et donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$. Et donc F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$. Et ceci est valable pour tout réel x de $[a ; b]$. F est donc une primitive de f sur $[a ; b]$. Par ailleurs, F s'annule en a , car $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. F est donc la primitive de f sur $[a ; b]$ qui s'annule en a .

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour toute primitive F de f sur $[a ; b]$, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration *

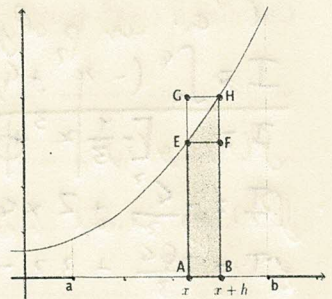
f est continue sur $[a ; b]$, donc f admet des primitives F sur $[a ; b]$.

f est continue et positive sur $[a ; b]$, d'après le théorème fondamental, il existe une fonction G définie sur $[a ; b]$ par

$G(x) = \int_a^x f(t) dt$. F et G sont des primitives de f sur $[a ; b]$. Donc il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$.

Or, $G(a) = 0$ car $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \Leftrightarrow F(a) + k = 0 \Leftrightarrow k = -F(a)$.

D'autre part, $\int_a^b f(t) dt = G(b)$, donc $\int_a^b f(t) dt = F(b) + k$, soit $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.



II- INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE SUR UN INTERVALLE

Définition (Extension au cas d'une fonction f continue et de signe quelconque sur $[a ; b]$)

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a ; b]$.

Notations

- On note encore ce nombre : $\int_a^b f(x) dx$.
- En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on détermine d'abord une primitive F de f sur $[a ; b]$ et on écrit :
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriété (conséquence immédiate)

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, alors $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Exemple 1

Calculer $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 3) dx$.

$$I = \int_1^4 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$I = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^4$$

$$I = -\frac{4^3}{3} + 2 \times 4^2 - 3 \times 4 - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \times 1^2 - 3 \times 1 \right)$$

$$I = -\frac{64}{3} + 32 - 12 + \frac{1}{3} - 2 + 3$$

$$I = 21 - 21$$

$$I = 0$$

Remarque On peut toujours vérifier le calcul à l'aide de la calculatrice.



Intégrales et calculatrices

• TI-83 : **math** 9(intégrFonct())

• Casio : **F4** (MATH) **F6** $\triangleright$ **F1** ($\int dx$)

• NumWorks : **Calcul** **int(f(x), x, a, b)** **OK**

puis on saisit
l'intégrale

Exemple 2 Calculer : $\int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+2t+5} dt$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+2t+5} dt$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2}(2t+2)}{t^2+2t+5} dt$$

$$I = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+2t+5) \right]_{-1}^1$$

$$I = \frac{1}{2} \ln(1^2+2+5) - \frac{1}{2} \ln((-1)^2+2 \times (-1)+5)$$

$$I = \frac{1}{2} \ln(8) - \frac{1}{2} \ln(4)$$

$$I = \frac{1}{2} \ln(2)$$

Exemple 3 Calculer $\int_4^1 \frac{e^{\sqrt{t}-1}}{2\sqrt{t}} dt$. : (I)

$$I = - \int_4^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}-1} dt$$

$$I = - \left[e^{\sqrt{t}-1} \right]_4^1$$

$$I = - (e^{\sqrt{1}-1} - e^{\sqrt{4}-1})$$

$$I = -e^1 + e^0$$

$$I = 1 - e$$

Intégrale et aire : interprétation géométrique

Dans un repère orthogonal, $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative d'une fonction f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note $\text{aire}(\mathcal{D})$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire.

Cas d'une fonction f continue et négative sur $[a; b]$

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = - \int_a^b f(x) dx$$

En effet, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathcal{D}$ est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe de $-f$ (qui est positive).

Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a; b]$. Donc :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (-f(x)) dx = [-F(x)]_a^b = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x) dx.$$

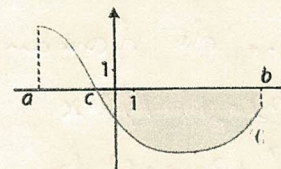
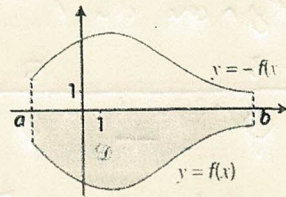
Vocabulaire : On dit que $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire algébrique** du domaine $\mathcal{D}$ (elle est positive si f est positive sur $[a; b]$, négative si f est négative sur $[a; b]$).

Cas d'une fonction f continue et de signe quelconque sur $[a; b]$

L'**aire de $\mathcal{D}$** est la **somme des aires algébriques** des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Pour la courbe ci-contre :

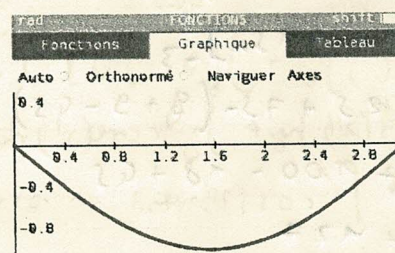
$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \sin(x + \pi)$ dont voici la courbe représentative.

Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$



$$\forall x \in [0; \pi] \quad x + \pi \in [\pi; 2\pi] \text{ donc } \sin(x + \pi) \leq 0$$

f est continue sur $[0; \pi]$ comme composée d'une fonction $\sin$ continue sur $[0; \pi]$ et a valeur dans $[-1; 0]$ par la fonction $\sin$ qui est continue sur $[\pi; 2\pi]$

Soit A l'aire du domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$

$$A = - \int_0^\pi f(x) dx ; A = - \int_0^\pi \sin(x + \pi) dx ; A = - [-\cos(x + \pi)]_0^\pi$$

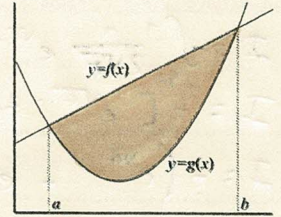
$$A = - (-\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi)) ; A = \cos(2\pi) - \cos(\pi) ; A = 1 - (-1) \quad A = 2 \text{ u.a.}$$

Propriété (admise)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$,

alors l'aire du domaine limité par les courbes de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donné par $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

**Exemple**

Soient f et g les fonctions définies sur $[-3; 5]$ par : $f(x) = 2x + 6$ et $g(x) = x^2 - 9$.

On note C_f et C_g leurs courbes respectives sur $[-3; 5]$.

Démontrer que pour tout x de $[-3; 5]$, $f(x) \geq g(x)$, puis en déduire l'aire entre les courbes C_f et C_g sur $[-3; 5]$.

• Montrons que $\forall x \in [-3; 5] \quad f(x) - g(x) \geq 0$

$$\forall x \in [-3; 5] \quad f(x) - g(x) = 2x + 6 - (x^2 - 9) ; f(x) - g(x) = -x^2 + 2x + 15$$

$$\forall x \in [-3; 5] \quad f(x) - g(x) = (x+3)(-x+5)$$

C'est un polynôme du 2nd degré avec $a = -1 < 0$ et qui a 2 racines -3 et 5

x	-3	5	
$f(x) - g(x)$	ϕ	ϕ	

rigne de -a
+

Donc $\forall x \in [-3; 5] \quad f(x) - g(x) \geq 0$
Donc $\forall x \in [-3; 5] \quad f(x) \geq g(x)$

• f et g sont continues sur $[-3; 5]$ comme fonctions polynômes définies sur $[-3; 5]$

• Soit A l'aire du domaine limité par C_f et C_g sur $[-3; 5]$

$$A = \int_{-3}^5 (f(x) - g(x)) dx$$

$$A = \int_{-3}^5 (-x^2 + 2x + 15) dx$$

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 15x \right]_{-3}^5$$

$$A = \frac{-125}{3} + 25 + 75 - \left(9 + 9 - 45 \right)$$

$$A = \frac{-125}{3} + 100 - 18 + 45$$

$$A = \frac{-125}{3} + 127$$

$$A = \frac{-125}{3} + \frac{381}{3}$$

$$A = \frac{256}{3} \text{ u.a.}$$

III- PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

Propriétés : linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

Soit k un nombre réel.

$$1) \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$2) \int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstrations : découlent des primitives de $f + g$ et de kf .

Exemple

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$. Calculer $I + J$, puis $I - J$. En déduire I et J .

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(t) dt \quad \text{par linéarité}$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt$$

$$I + J = [t]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I + J = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(t) dt$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt + (-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(t) dt \quad \text{par linéarité}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2(t) dt$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2(t) - \sin^2(t)) dt$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) dt$$

$$I - J = \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I - J = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin(0)$$

$$I - J = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} (S) \rightarrow 2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \\ (S) \rightarrow J = \frac{\pi}{4} - I \end{cases} \quad \begin{cases} I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \\ J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$(S) \rightarrow \begin{cases} I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \\ J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} \end{cases}$$

Propriété : relation de Chasles (mathématicien français du 19^{ème} siècle)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tous nombres c, d et e de $[a ; b]$, on a : $\int_c^d f(x) dx = \int_c^e f(x) dx + \int_e^d f(x) dx$.

Démonstration

$\int_c^d f(x) dx = [F(x)]_c^d = F(d) - F(c)$. Et, $\int_c^e f(x) dx + \int_e^d f(x) dx = [F(x)]_c^e + [F(x)]_e^d = F(e) - F(c) + F(d) - F(e) = F(d) - F(c)$. Donc $\int_c^d f(x) dx = \int_c^e f(x) dx + \int_e^d f(x) dx$.

Propriétés : positivité

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

1) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Démonstrations : découlent directement de la définition de l'intégrale.

Remarque

Les propriétés réciproques sont fausses.

Par exemple, $\int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2}$, mais sur $[-1 ; 2]$, la fonction $x \mapsto x$ ne garde pas un signe constant.

Propriété : intégration des inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$.

Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration

D'après les données, $g - f$ est une fonction continue et positive sur $[a ; b]$.

Donc, par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$ soit $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$.

Donc, par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

Exemple

Déterminer un encadrement de $\int_1^8 \sqrt{1+x} dx$.

$$\forall x \in [1; 8] \quad 2 \leq 1+x \leq 9$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{9}$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x} \leq 3$$

car la fonction racine carrée est croissante

maintenant sur $\mathbb{R}^+$

La fonction $x \mapsto \sqrt{2}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto 3$ sont continues sur $[1; 8]$

Alors, d'après la propriété de l'intégration des inégalités

$$\int_1^3 \sqrt{x} dx \leq \int_1^3 \sqrt{1+x} dx \leq \int_1^3 3 dx$$

$$[\frac{2}{3}x^{3/2}]_1^3 \leq \int_1^3 \sqrt{1+x} dx \leq [3x]_1^3$$

$$7\sqrt{2} \leq \int_1^3 \sqrt{1+x} dx \leq 21$$

Définition

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

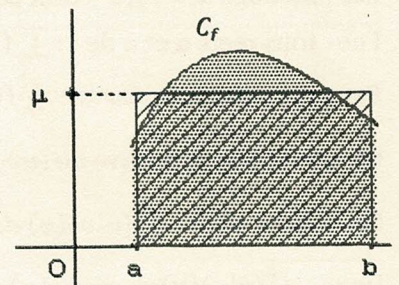
La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre réel μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Interprétation graphique dans le cas où f est positive sur $[a; b]$.

Dans un repère orthogonal, C_f est la courbe représentative de la fonction f .

Alors $\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$.

Donc, l'aire du domaine situé sous la courbe C_f est égale à l'aire du rectangle de dimensions μ et $b-a$.

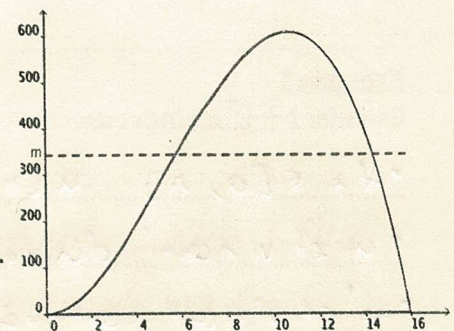
**Exemple**

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

Au x -ième jour après le signalement des premiers cas,

le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Voici la courbe représentative de la fonction f sur $[0; 16]$.



Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

f est continue sur $[0; 16]$ comme f est un polynôme sur $[0; 16]$
Soit μ la valeur moyenne de f sur $[0; 16]$

$$\mu = \frac{1}{16-0} \int_0^{16} f(x) dx$$

$$\mu = \frac{1}{16} \int_0^{16} (16x^2 - x^3) dx$$

$$\mu = \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{16}$$

$$\mu = \frac{1}{16} \left(\frac{16^4}{3} - \frac{16^4}{4} \right)$$

$$\mu = \frac{16^3}{12}$$

$$\mu \approx 39,1$$

Donc il y a en moyenne 39,1 malade par jour sur une période de 16 jours

IV- INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I .

Alors, pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Démonstration*

Les fonctions u et v sont dérivables sur I , donc le produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Les fonctions u, u', v, v' étant continues sur I , les fonctions $u'v, uv'$ et $(uv)'$ sont aussi continues sur I .

Pour tous réels a et b de I : $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b (u'v + uv')(x) dx$

Par propriété de linéarité : $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b (u'v)(x) dx + \int_a^b (uv')(x) dx$

Or, uv est une primitive de $(uv)'$ sur I , donc : $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$

On obtient ainsi : $\int_a^b (u'v)(x) dx + \int_a^b (uv')(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$

Donc : $\int_a^b (u'v)(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x) dx$. Soit : $\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$

Exemple 1

Calculer $I = \int_0^\pi x \sin(x) dx$.

* $\forall x \in [0; \pi]$ $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = x$

* u et v sont dérivables sur $[0; \pi]$ et $\forall x \in [0; \pi]$ $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = 1$

* u' et v' sont continues sur $[0; \pi]$

Alors d'après le Théorème d'intégration par parties :

$$I = [u(x) v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u(x) v'(x) dx$$

$$I = [-x \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x) dx$$

$$I = \pi - 0 + \int_0^\pi \cos(x) dx$$

$$I = \pi + \sin(\pi) - \sin(0)$$

$$I = \pi$$

Exemple 2

Soit x un réel strictement positif. Calculer $\int_1^x \ln(t) dt$. En déduire une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Soit $F(x) = \int_1^x t \ln(t) dt$

$\forall t \in \mathbb{R}^{**+} u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^{**+}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{**+} u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$

u et v sont continues sur $\mathbb{R}^{**+}$

Alors, d'après le théorème d'intégration par partie

$$F(x) = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t) dt$$

$$F(x) = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt$$

$$F(x) = x \ln(x) - 1 \ln(1) - \int_1^x 1 dt$$

$$F(x) = x \ln(x) - [t]_1^x$$

$$F(x) = x \ln(x) - x + 1$$

$t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{**+}$

Alors, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction $F: x \mapsto \int_1^x \ln(t) dt$ est la primitive de $t \mapsto \ln(t)$ qui s'annule en 1

Donc F est une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}^{**+}$